Ökonomie

ganz gründlich – für Schüler

Teil 2:

Funktionen aus der Wirtschaftsmathematik ab 3. Grades

Nachfragefunktion, Angebotsfunktion, Erlösfunktion, Kostenfunktionen, Gewinnfunktionen

Mit vielen Aufgaben und ausführlichen Lösungen

Datei – Nr. 49302

Stand 16 März 2011

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist als Begleitung zum Unterricht an beruflichen Schulen gedacht, bei denen es zur Einführung von Funktionen stets Anwendungen aus der Ökonomie gibt. Dazu findet man hier reichlich Aufgaben mit Lösungen.

Weil es zu vielen dieser Aufgaben mehrere Lösungswege gibt, findet man viele Lösungen auch auf zwei oder gar mehr Arten ausgeführt. So kann sich jeder seine passende Methode aussuchen.

In diesem 2. Teil werden Funktionen dritten und höheren Grades behandelt.

Im Text 49311 findet man diese Thematik ziemlich kompakt, also eher geeignet zum Wiederholen und um sich einen Überblick zu verschaffen.

Einige Lösungen wurden mit CAS-Rechnern erstellt. Im Zuge der Reformierung des Mathematik-Unterrichts können Schüler inzwischen in vielen Bundesländern diese Geräte als Hilfsmittel verwenden. Manche Funktionen sind auch so kompliziert, dass eine manuelle Lösung mit einfachen Taschenrechnern heute nicht mehr gefordert wird.

Inhalt Text 49301 (anderer Text)

Inhalt Text 49302 – dieser Text

3 Kostenuntersuchungen

3.1 Hintergründe

Bei der Produktion entstehen **Kosten.** Zunächst entstehen **fixe Kosten**, die durch Miete, Gehälter, Abschreibungen usw. entstehen. Sie ändern sich nicht, wenn der Grad der Beschäftigung schwankt, etwa weil je nach Nachfrage die Produktion zurückgeht oder bis zur Kapazitätsauslastung ansteigt. Erst wenn die Kapazität überschritten wird, so dass Überstunden fällig werden, höhere Energiekosten anfallen und eventuell neue Maschinen gekauft werden müssen, machen die Fixkosten einen Sprung.
Daneben gibt es die **variablen Kosten**, die von der Produktionsmenge x abhängen.
Die **Gesamtkosten** nennt man oft totale Kosten $TK(x)$, einfach um begriffliche Klarheit zu haben.

$$\boxed{TK(x) = VK(x) + FK(x)}$$

Man merke sich, das sind die Kosten, wenn man x Güter produziert hat. Dividiert man durch die Ausbringungsmenge (die Anzahl der produzierten Güter, erhält man die Stückkosten.
Und da wir bis jetzt dreierlei Kosten haben, kann man auch dreierlei Stückkosten angeben:

Gesamtstückkosten:	$TDK(x) = \frac{TK(x)}{x}$	„totale Durchschnittskosten“.
Variable Stückkosten:	$VDK(x) = \frac{VK(x)}{x}$	„variable Durchschnittskosten“.
Fixe Stückkosten:	$DF(x) = \frac{FK(x)}{x}$	„fixe Durchschnittskosten“.

Beispiel zu verschiedenen Typen von Kostenfunktionen

(1) **Lineare Gesamtkosten:** $K(x) = 50x + 800$ oder $TDK(x) = 50x + 800$.

Variable Kosten: $VK(x) = 50 \cdot x$

Fixkosten: $F(x) = 800$

Variable Stückkosten: $VDK(x) = \frac{VK(x)}{x} = \frac{50x}{x} = 50$.

Fixe Stückkosten: $DF(x) = \frac{FK(x)}{x} = \frac{800}{x}$

Solche Kostenfunktionen sind entsprechen kaum der Wirklichkeit. Hier sind die variablen Kosten direkt proportional zur Ausbringungsmenge. Wenn man also 10 mal so viel produziert hat, dann müssten diese variablen Kosten um das 10-fache zugenommen haben.
Man hätte also je Produktionseinheit 50 GE an variablen Kosten.

Der Definitionsbereich einer solchen Funktion ist $\mathbf{D} = \left[\ 0\ ;\ x_{Kap}\ \right]$. Das heißt es wird höchstens bis zur Kapazitätsgrenze produziert. (Eigentlich selbstverständlich!)

(2) **s-förmige Gesamtkostenkurven** entsprechen eher der Realität. Man nennt sie auch **ertragsgesetzliche Gesamtkostenkurve**. Zur modellhaften Beschreibung eignen sich ganzrationale Funktionen 3. Grades.

Beispiel 1

Das Unternehmen Knipps stellt elektronische Kameras her. Der Verkaufspreis beträgt 200 €. Die Gesamtkosten K für die Produktion von x Kameras in einem Monate können modellhaft durch diese **Kostenfunktion** K(x) berechnet werden: $K(x)=\frac{1}{10}x^3-5x^2+125x+900$

Schauen wir uns zuerst rein formal die verschiedenen Kostenfunktionen dazu an:

Variable Kosten: $VK(x)=\frac{1}{10}x^3-5x^2+125x$

Fixkosten: $F(x)=900$

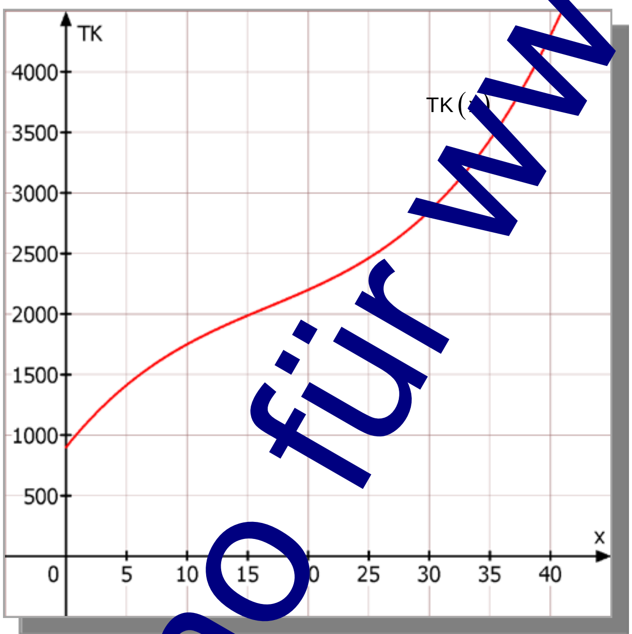
Grenzkosten: $TK'(x)=\frac{3}{10}x^2-10x+125$

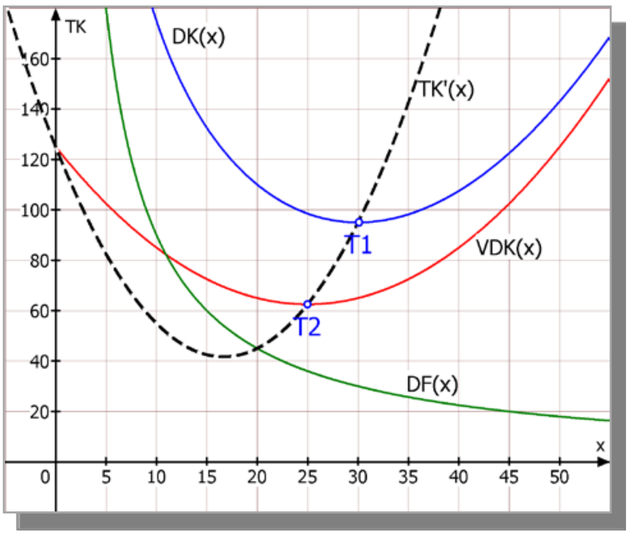
Totale Stückkosten: $TDK(x)=\frac{TK(x)}{x}=\frac{1}{10}x^2-5x+125+\frac{900}{x}$

Variable Stückkosten: $VDK(x)=\frac{VK(x)}{x}=\frac{\frac{1}{10}x^3-5x^2+125x}{x}=\frac{1}{10}x^2-5x+125$.

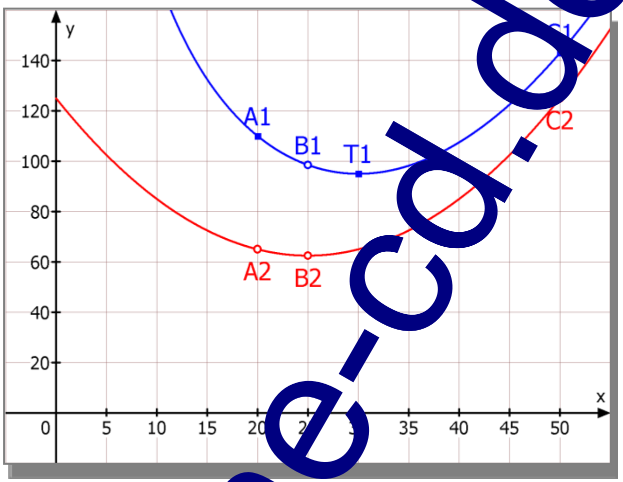
Fixe Stückkosten: $DF(x)=\frac{FK(x)}{x}=\frac{900}{x}$

Die Schaubilder dazu:





Links erkennt man die s-förmige Gesamtkostenkurve. Rechts sind die anderen Kostenkurven dargestellt. Zu ihnen werden jetzt für die Volkswirtschaft einige wichtige Beobachtungen angestellt.



Die Schaubilder der totalen Stückkosten

$\mathrm{TDK}(x) = \frac{1}{10}x^2 - 5x + 125 + \frac{900}{x}$

und der variablen Stückkosten

$\mathrm{VDK}(x) = \frac{1}{10}x^2 - 5x + 125$

haben jeweils einen Tiefpunkt.

Ihre Kenntnis ist für den Betrieb von fundamentaler Bedeutung:

Werden 20 Kameras produziert, dann betragen die Herstellkosten $\mathrm{TK}(20) = 2200$ (€).

Das bedeutet pro Kamera durchschnittlich 110 €, was man auch über $\mathrm{TDK}(20) = 110$ erhält.

Diese Situation wird durch den Punkt $A_1(20\,|\,110)$ dargestellt. Wir erinnern uns zwischendurch, dass der Verkaufspreis bei 200 € liegt.

Werden 25 Kameras produziert, dann liegt der durchschnittliche Stückpreis bei $\mathrm{TDK}(25) = 98{,}5$ (€).

Die Stückkosten fallen also. Der Betrieb produziert rentabler. Zustandspunkt ist jetzt $B_1(25\,|\,98{,}5)$

Wir steigern die Ausbringungsmenge: $\mathrm{TDK}(50) = 143$ (€). Mit dem Zustandspunkt $C_1(50\,|\,143)$.

Irgendwann sind die Produktionskosten so hoch, dass kein Gewinn mehr anfällt: Mit $\mathrm{TDK}(60) = 200$ (€) ist bereits der Endpunkt der Gewinnzone erreicht.

Mit der Totalen Stückkostenfunktion kann man die Ausbringungsmenge x_{opt}, genannt **Betriebsoptimum** berechnen, bei der der Stückkostenpreis minimal wird. Diese minimale Stückkostenpreis heißt **langfristige Preisuntergrenze**.

Der Name kommt daher: Wenn der Marktpreis genauso hoch ist wie der minimale Stückkostenpreis, verdient der Betrieb nichts, aber die entstandenen Kosten werden gedeckt. Er kann also langfristig existieren.

Wir haben jetzt die totalen Durchschnittskosten betrachtet. Man kann natürlich auch die variablen Durchschnittskosten berechnen. Dann folgen wir der roten Parabel und erhalten folgende Werte:

$\mathrm{TDK}(20) = 65$ (€) Zustandspunkt $A_2(20\,|\,65)$

$\mathrm{TDK}(25) = 62{,}50$ (€) Zustandspunkt $B_2(25\,|\,62{,}5)$

$\mathrm{TDK}(50) = 125$ (€) Zustandspunkt $C_2(50\,|\,125)$

Der Tiefpunkt scheint hier mit C_2 zusammen zu fallen.

Die x-Koordinate dieses Tiefpunktes der variablen Stückpreiskurve nennt man das **Betriebsminimum** und seine y-Koordinate die **kurzfristige Preisuntergrenze**.

Wenn der Marktpreis nur noch so hoch ist, wie der minimale variable Stückkostenpreis, dann werden nur noch die variablen Stückkosten gedeckt, aber nicht mehr die Fixkosten. Damit kann ein Betrieb nur noch sehr kurzfristig überleben.

Hinweise

a) Die Ableitungsfunktion $TK'(x) = \frac{3}{10}x^2 - 10x + 125$ heißt auch „Grenzkosten".
Sie schneidet die beiden soeben betrachteten Stückkostenkurven in ihren Tiefpunkten.
Wie kann man das auf Anfrage erklären?

Zur Berechnung des Betriebsoptimums muss man die Funktion $TDK(x) = \frac{TK(x)}{x}$ ableiten. Mit Hilfe der Quotientenregel folgt: $TDK'(x) = \frac{TK'(x)\cdot x - 1\cdot TK(x)}{x^2}$

Für den Tiefpunkt gilt: $TDK'(x) = 0$

Also wird der Zähler Null: $TK'(x)\cdot x = TK(x)$

Dividiert man noch durch x, folgt: $TK'(x) = \frac{TK(x)}{x}$

und das heißt doch: $TK'(x) = TDK(x)$,

was nur im Tiefpunkt erfüllt ist.

b) Die durchschnittliche Fixkostenfunktion fällt mit steigendem x, denn je mehr man die Fixkosten aufteilt, desto weniger fallen sie bei einem produzierten Gut ins Gewicht.

3.2 Beispiele und Aufgaben zur Stückkostenfunktion

Beispiel 2

Gegeben ist die totale Kostenfunktion durch $TK(x) = \underbrace{0{,}001x^3 - 0{,}09x^2 + 3x}_{VK(x)} + \underbrace{16}_{FK}$

a) Berechne die **durchschnittliche Stückkostenfunktion**,

$$DTK(x) = \frac{TK(x)}{x} = \underbrace{0{,}01x^2 - 0{,}09x + 3}_{DVK(x)} + \underbrace{\frac{16}{x}}_{DFK(x)}$$

Ferner $DVK(x) = \frac{VK(x)}{x} = 0{,}01x^2 - 0{,}09x + 3$

die **durchschnittlichen variablen Kosten (variable Stückkosten)**

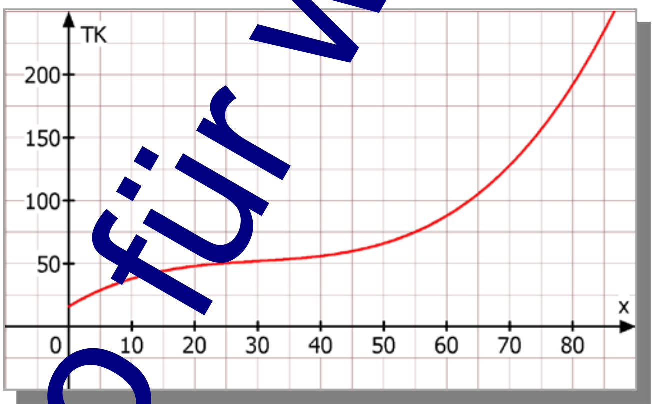
und $DFK(x) = \frac{FK}{x} = \frac{16}{x}$ die **durchschnittlichen Fixkosten (fixe Stückkosten)**

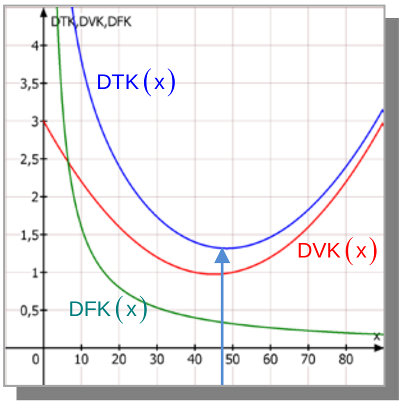
Wer mit einem Taschenrechner arbeitet, stellt eine solche Wertetafel auf:

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$TK(x)$	16	38	48	52	56	66	88	128	192
$DTK(x)$	---	3,8	2,4	1,73	1,4	1,32	1,47	1,83	2,4
$VK(x)$	0	22	32	36	40	50	72	112	176
$DVK(x)$	0	2,2	1,6	1,2	1	1	1,2	1,6	2,2
$DFK(x)$	-	1,6	0,8	0,53	0,4	0,32	0,27	0,23	0,20

Auf den nächsten Seiten folgen Anleitungen, wie man diese Tabellen mit den CAS-Rechnern TI Nspire bzw. CASIO ClassPad erstellen kann.

b)



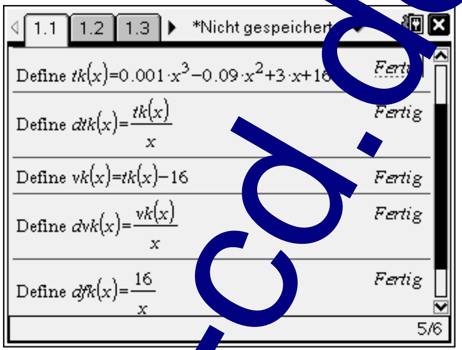


Die grafischen Darstellungen dieser Funktionen wurden mit Mathegrafix erstellt.

b) Berechnung des Betriebsoptimums und des minimalen Stückkostenpreises

Zuerst die Ableitung: $DTK'(x) = 0{,}02x - 0{,}09 - \frac{16}{x^2}$. $0{,}02x - 0{,}09 - \frac{16}{x^2} = 0 \;|\; x^2$ ergibt die Gleichung $0{,}02x^3 - 0{,}09x^2 - 16 = 0$ mit der Lösung $x \approx 48$ (Betriebsoptimum (Pfeil!). Der zugehörige minimale Stückkostenpreis ist $DTK(48) \approx 1{,}32$ (GE) - siehe CAS Lösung 2 Seiten weiter.

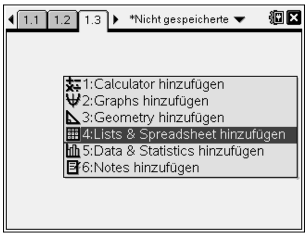
Tabellen-Erstellung mit TI Nspire.



Zuerst muss man natürlich die benötigten Funktionen definieren.

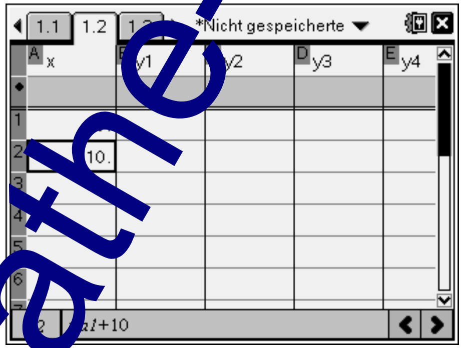
Dann öffnet man eine Tabelle.

Mit ctrl doc öffnet man ein Menü zum Einfügen des Moduls „Lists & Spreadsheet".



Zuerst beschriftet man die Spaltenköpfe mit x, y_1 bis y_5.

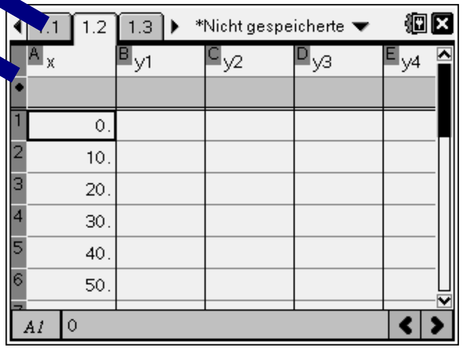
Dann füllt man die erste Spalte mit den x-Werten 0 bis 80.



Wenn man sie nicht alle eintragen will, kann man das Nspire tun lassen. Dazu geht man in das Feld A1 und trägt den Startwert 10 ein. Dann in A2 die Formel, die man am unteren Bildrand sieht: = a1 + 10 und enter . Nun ruft man über „Menü 3 – 3" den Befehl auf „Nach unten ausfüllen".

Den dann erscheinenden gestrichelten Rahmen verlängert man mit der Cusortaste so weit nach unten, wie man möchte.

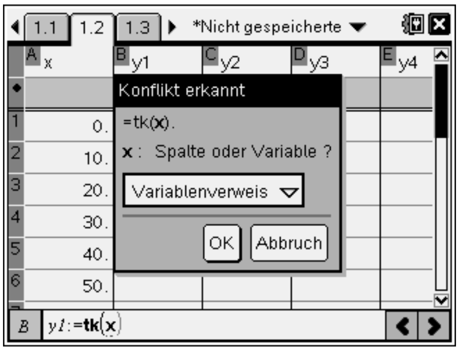
Nach enter füllt Nspire die Spalte aus.



Jetzt trägt man in das Feld unter y1 die Formel für die darunter einzutragenden Funktionswerte ein: = tk(x)

Weil wir sowohl die Variable als auch die 1. Spalte mit x bezeichnet haben, frage Nspire nach, welche Bedeutung er dem x geben soll: Man bestätigt „Variablenverweis".

Nach OK erscheinen die gewünschten Funktionswerte.

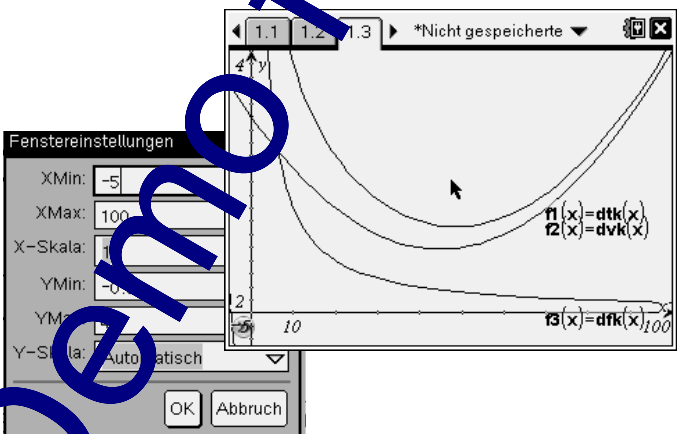


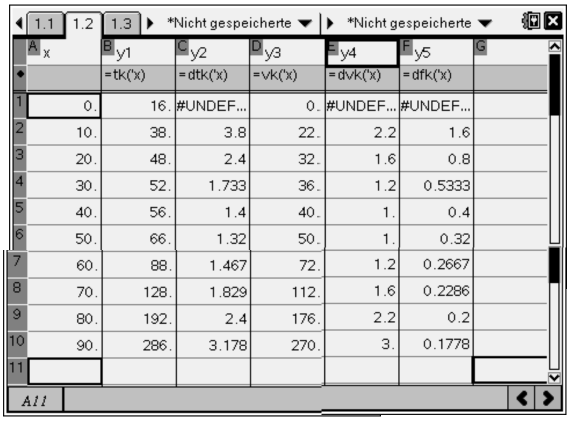
Dies setzt man für die Funktionswerte $y_2 = dtk(x)$, $y_3 = vk(x)$, $y_4 = dvk(x)$ und $y_5 = dfk(x)$ fort.

Das Ergebnis erstreckt sich weit über den Screen hinaus fort.

Hier die Zusammensetzung zu einer Abbildung:

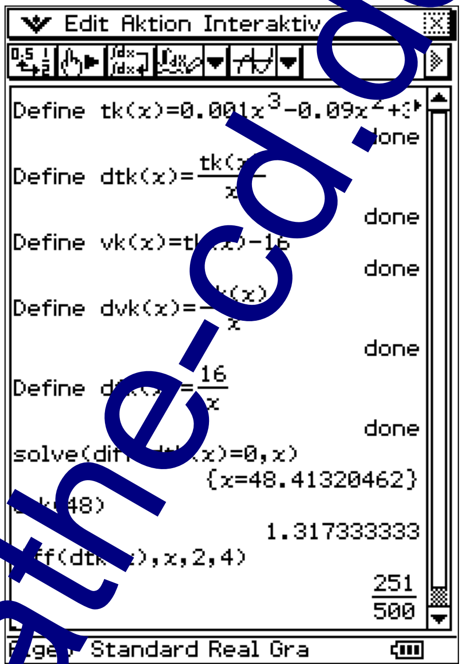
Und drei Schaubilder.





	A x	B y1	C y2	D y3	E y4	F y5
		=tk('x)	=dtk('x)	=vk('x)	=dvk('x)	=dfk('x)
1	0.	16.	#UNDEF...	0.	#UNDEF...	#UNDEF...
2	10.	38.	3.8	22.	2.2	1.6
3	20.	48.	2.4	32.	1.6	0.8
4	30.	52.	1.733	36.	1.2	0.5333
5	40.	56.	1.4	40.	1.	0.4
6	50.	66.	1.32	50.	1.	0.32
7	60.	88.	1.467	72.	1.2	0.2667
8	70.	128.	1.829	112.	1.6	0.2286
9	80.	192.	2.4	176.	2.2	0.2
10	90.	286.	3.178	270.	3.	0.1778

Tabellen-Erstellung mit CASIO ClassPad



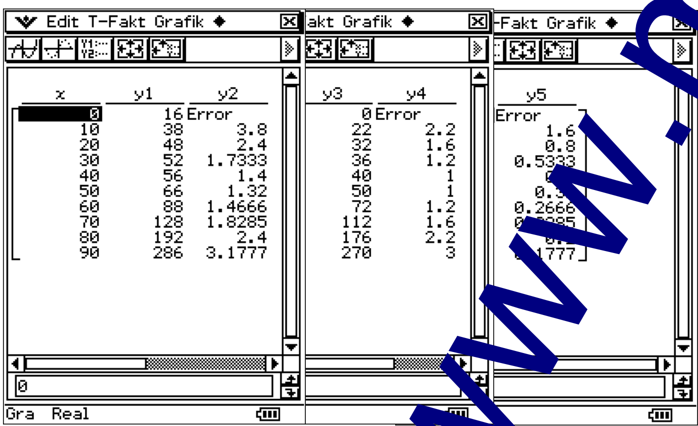
Zuerst muss man natürlich die benötigten Funktionen definieren.

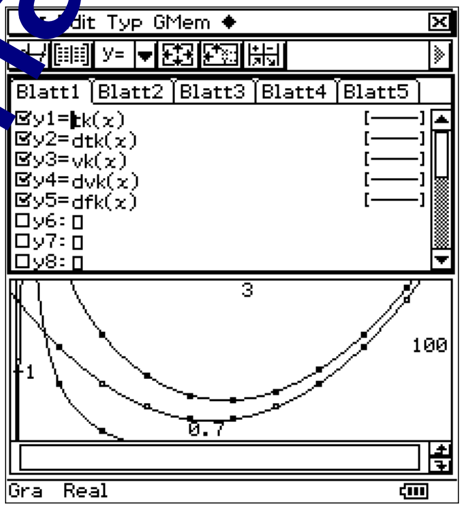
In der dritten Zeile von unten wird die Gleichung $DTK'(x) = 0$ gelöst. Das Ergebnis ist das Betriebsoptimum x = 48, bei dem der Stückkostenpreis minimal ist: 1,32 GE.

Die letzte Zeile untersucht die hinreichende Bedingung:

$DKT''(48) > 0$, also liegt ein Minimum vor.

Trägt man die Funktionen in die Liste ein, kann sie darstellen lassen.
Die Werte der markierten Funktionen kann man dann auch in einer Wertetabelle ausgeben lassen:





AUFGABEN

Aufgabe 3.1

Ein Unternehmen hat die Kostenfunktion K.

Bestimme das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze

Skizziere den Verlauf der variablen Stückkostenfunktion.

a) $K(x) = 0{,}2x^3 - 2{,}6x^2 + 13{,}2x + 8$ b) $K(x) = x^3 - 14x^2 + 66x + 40$

Aufgabe 3.2

Ein in Unternehmen hat die Kostenfunktion K.

Berechne das Betriebsoptimum mit der langfristigen Preisuntergrenze

Skizziere den Verlauf der variablen Stückkostenfunktion.

a) $K(x) = x^3 - 75x^2 + 2100x + 8000$ b) $K(x) = 0{,}2x^3 - 7x^2 + 180x + 400$

Aufgabe 3.3

Ein in Unternehmen hat die Kostenfunktion K.

Berechne das Betriebsminimum und das Betriebsoptimum, die kurzfristige und die langfristige Preisuntergrenze.

a) $K(x) = x^3 - 9x^2 + 28x + 25$ b) $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$

4 Funktionen 3. Grades

4.1 Großes Einführungsbeispiel

Zunächst gibt es diese Begriffsdefinitionen für bestimmte Ableitungsfunktionen:

Definition:

Grenzerlös = 1. Ableitungsfunktion der Erlösfunktion
Grenzkosten = 1. Ableitungsfunktion der Kostenfunktion
Grenzgewinn = 1. Ableitungsfunktion der Gewinnfunktion

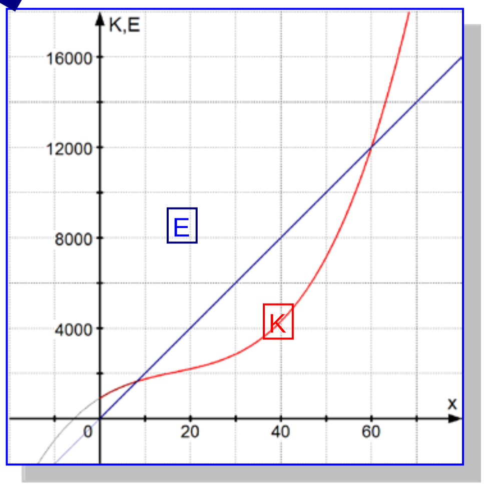
Wir verwenden wieder das **Beispiel 1** aus Abschnitt 3.1:

Der Unternehmer Knipps stellt elektronische Kameras her. Als ***Polypolist*** muss Knipps mit einem vom Markt vorgegebenen festen Verkaufspreis von 200 € pro Kamera rechnen.
Die Gesamtkosten K für die Produktion von x Kameras in einem Monate können modellhaft durch diese **Kostenfunktion** K(x) berechnet werden: $K(x) = \frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 125x + 900$

Den Kosten steht der **Erlös** gegenüber, der wie gesagt pro Kamera 200 € beträgt.
Dies definiert die sogenannte **Erlösfunktion**: $E(x) = 200\,x$

Erklärung:

Die rote Kostenkurve schneidet die Erlöskurve zweimal.
Zwischen den Schnittpunkten liegt die Kostenkurve unter der Erlöskurve. Das heißt zwischen den Schnittstellen (ca. 9 und 60) ist der Erlös größer als die Kosten.
Dies ist also die **Gewinnzone.**



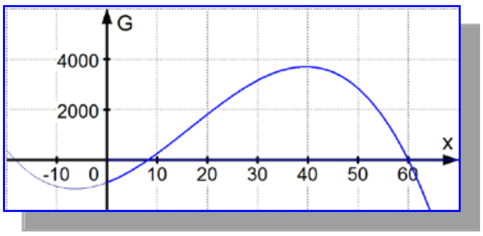
Werden mehr als 60 Kameras in der zugrunde gelegten Zeiteinheit verkauft, sind die Produktionskosten höher als der Erlös. Die kleinere Schnittstelle (9) heißt die **Nutzenschwelle** oder **Gewinnschwelle**, die obere (60) **Nutzengrenze** oder **Gewinngrenze**.

Übrigens: Beide Funktionen haben als *mathematischen* Definitionsbereich: $\mathbf{D} =]\,0\,;\infty\,[$.

Für die Gewinnfunktion gilt $\boxed{G(x) = E(x) - K(x)}$

Sie lautet hier $G(x) = -\frac{1}{10}x^3 + 5x^2 + 75x - 900$

Für sie können wir vorhersagen, dass sie zwei **Nullstellen** haben wird, nämlich dort, wo sich die Schaubilder von E und K schneiden. (Denn dort ist E(x) = K(x) also $G(x) = E(x) - K(x) = 0$)
Dazwischen verläuft sie über der x-Achse, hier arbeitet der Betrieb mit Gewinn. Dies ist die schon genannte **Gewinnzone**.



Außerhalb dieses Bereichs verläuft die Kurve unterhalb der x-Achse. Das ist der Verlustbereich. Links von 0 ist sie nicht definiert. An den Nullstellen der Gewinnfunktion wird **Kostendeckung** erreicht.

Die Berechnung der Nullstellen einer Funktion 3. Grades ist bisweilen sehr kompliziert.

Man hat eigentlich 3 Möglichkeiten:

1. Man findet eine Probierlösung und kann dann die Nullstellengleichung durch Ausklammern (Faktorisierung) in ein Produkt zerlegen, was zu einer quadratischen Gleichung führt.

Manche Gleichungen lassen sich nur näherungsweise mit Rechnern lösen. Etwa so:

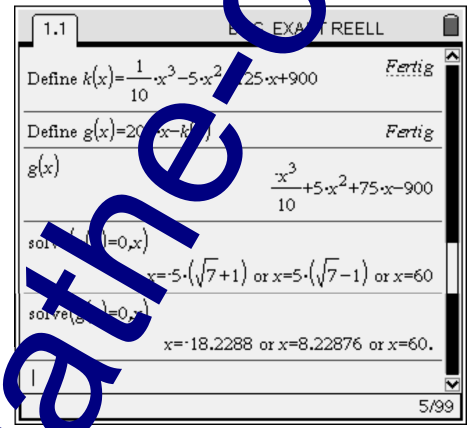
Berechnung der Nullstellen mit TI Nspire:

Anleitung: Zuerst werden die Funktionen K und G definiert. Es folgt die Berechnung der Nullstellen durch Lösen der Gleichung G(x) = 0.

Zuerst wurden (bei mir) exakte Werte ausgegeben, diese wandelt man in Dezimalzahlen um:

$x_1 \approx 8{,}2$ und $x_2 = 60$.

(x_3 =-18 ist außerhalb des Definitionsbereichs!).



Man beachte, dass nur ganzzahlige Werte Sinn machen.

Gewinnzone ist somit das Intervall $[9\,;59]$. Bei 8 liegt also Verlust vor, bei 60 ist Kostendeckung erreicht, also kein Gewinn mehr vorhanden.

a) Für welche Ausbringungsmenge wird das **Gewinnmaximum** erreicht?

$$G(x) = -\tfrac{1}{10}x^3 + 5x^2 + 75x - 900$$
$$G'(x) = -\tfrac{3}{10}x^2 + 10x + 75$$
$$G''(x) = -\tfrac{3}{5}x + 10$$

Extremwerte werden über die Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion berechnet.
Die 2. Ableitung entscheiden dann über Maximum und Minimum!

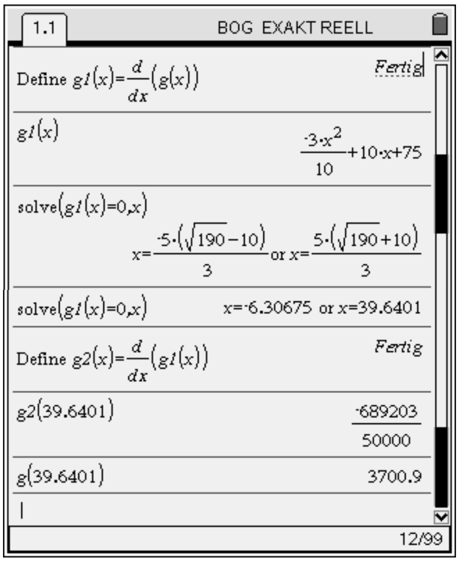
Extremwertberechnung: Bedingung: $\boxed{G'(x) = 0}$

$$-\tfrac{3}{10}x^2 + 10x + 75 = 0 \qquad |\cdot(-10)$$
$$3x^2 - 100x - 750 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 + 12\cdot 750}}{6} = \frac{100 \pm \sqrt{109000}}{6} \approx \begin{cases} (-6{,}3,...) \\ 39{,}6 \end{cases}$$

Oder mit TI Nspire:

Ich definiere g1(x) als g'(x) und g2(x) als g''(x).

Die Kontrolle liefert $g''(x_2) < 0$.



Ergebnis:

Die Gewinnfunktion hat bei etwa x = 40 ihr Maximum an.

Der maximale Gewinn beträgt dann $G_{max} \approx 3700$ €.

b) Wie groß der **Kostenzuwachs** bei einer Veränderung der Produktion?

Wir schauen zuerst einmal zwei Situationen an: